



西城区高三模拟测试

数学(理科)

2018.5

第I卷(选择题 共40分)

一、选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 若集合 $A = \{x | 0 < x < 1\}$, $B = \{x | x^2 - 2x < 0\}$, 则下列结论中正确的是

(A) $A \cap B = \emptyset$

(B) $A \cup B = \mathbf{R}$

(C) $A \subseteq B$

(D) $B \subseteq A$

2. 若复数 z 满足 $(1-i) \cdot z = 1$, 则 $z =$

(A) $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

(B) $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

(C) $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

(D) $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

3. 下列函数中,既是偶函数又在区间 $(0,1)$ 上单调递减的是

(A) $y = \frac{1}{x}$

(B) $y = x^2$

(C) $y = 2^{|x|}$

(D) $y = \cos x$

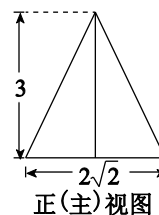
4. 某正四棱锥的正(主)视图和俯视图如图所示,该正四棱锥的侧面积是

(A) 12

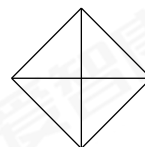
(B) $4\sqrt{10}$

(C) $12\sqrt{2}$

(D) $8\sqrt{5}$



正(主)视图



俯视图

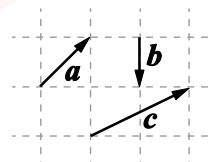
5. 向量 a, b, c 在正方形网格中的位置如图所示. 若向量 $\lambda a + b$ 与 c 共线, 则实数 $\lambda =$

(A) -2

(B) -1

(C) 1

(D) 2



6. 已知点 $A(0,0)$, $B(2,0)$. 若椭圆 $W: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{m} = 1$ 上存在点 C , 使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 则椭圆 W 的离心率是

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



7. 函数 $f(x) = \sqrt{1-x^2} + a$. 则“ $a \geq 0$ ”是“ $\exists x_0 \in [-1, 1]$, 使 $f(x_0) \geq 0$ ”的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

8. 在直角坐标系 xOy 中, 对于点 (x, y) , 定义变换 σ : 将点 (x, y)

变换为点 (a, b) , 使得 $\begin{cases} x = \tan a, \\ y = \tan b, \end{cases}$ 其中 $a, b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 这样变

换 σ 就将坐标系 xOy 内的曲线变换为坐标系 aOb 内的曲线.

则四个函数 $y_1 = 2x (x > 0)$, $y_2 = x^2 (x > 0)$, $y_3 = e^x (x > 0)$,

$y_4 = \ln x (x > 1)$ 在坐标系 xOy 内的图象, 变换为坐标系 aOb 内

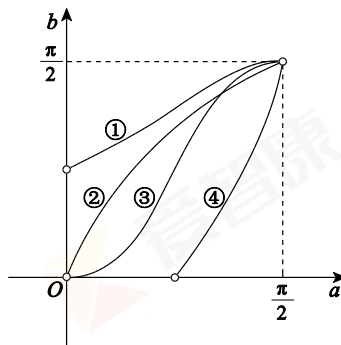
的四条曲线(如图)依次是

(A) ②, ③, ①, ④

(B) ③, ②, ④, ①

(C) ②, ③, ④, ①

(D) ③, ②, ①, ④



第Ⅱ卷 (非选择题 共 110 分)

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos \theta, \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则圆 C 的面积为____; 圆心 C 到直线

$l: 3x - 4y = 0$ 的距离为_____.

10. $(x^2 + \frac{1}{x})^4$ 的展开式中 x^2 的系数是_____.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3$, $b = 2$, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, 则 $\cos 2B =$ _____.

12. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_1 = 1$, $S_2 > S_3$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以是_____.



13. 设不等式组 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x + y \geq 3, \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$ 表示的平面区域为 D . 若直线 $ax - y = 0$ 上存在区域 D 上的点, 则实数 a 的取值范围是_____.

14. 地铁某换乘站设有编号为 A, B, C, D, E 的五个安全出口. 若同时开放其中的两个安全出口, 疏散 1000 名乘客所需的时间如下:

安全出口编号	A, B	B, C	C, D	D, E	A, E
疏散乘客时间 (s)	120	220	160	140	200

则疏散乘客最快的一个安全出口的编号是_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = (1 + \tan x) \cdot \sin 2x$.

(I) 求 $f(x)$ 的定义域;

(II) 若 $\alpha \in (0, \pi)$, 且 $f(\alpha) = 2$, 求 α 的值.

16. (本小题满分 14 分)

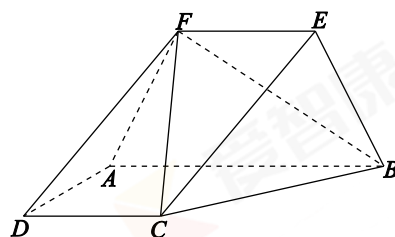
如图, 梯形 $ABCD$ 所在的平面与等腰梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直, $AB \parallel CD \parallel EF$, $AB \perp AD$. $CD = DA = AF = FE = 2$, $AB = 4$.

(I) 求证: $DF \parallel$ 平面 BCE ;

(II) 求二面角 $C-BF-A$ 的余弦值;

(III) 线段 CE 上是否存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF ?

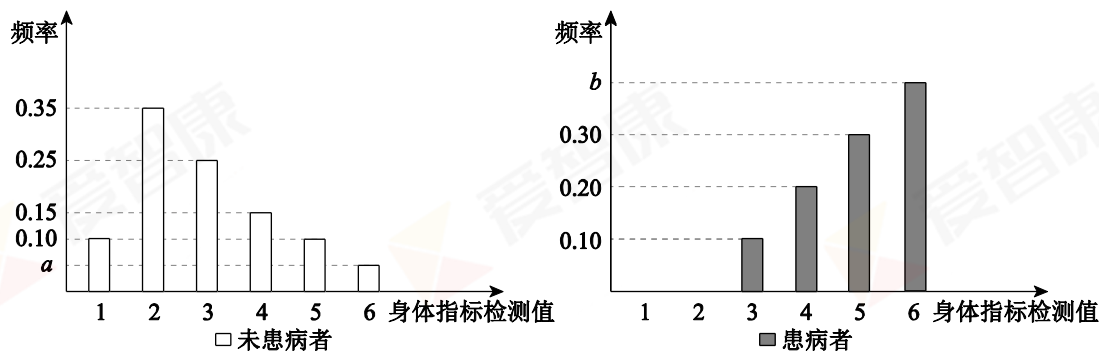
请说明理由.





17. (本小题满分 13 分)

在某地区,某项职业的从业者共约 8.5 万人,其中约 3.4 万人患有某种职业病.为了解这种职业病与某项身体指标(检测值为不超过 6 的正整数)间的关系,依据是否患有职业病,使用分层抽样的方法随机抽取了 100 名从业者,记录他们该项身体指标的检测值,整理得到如下统计图:



(I) 求样本中患病者的人数和图中 a, b 的值;

(II) 在该指标检测值为 4 的样本中随机选取 2 人, 求这 2 人中有患病者的概率;

(III) 某研究机构提出, 可以选取常数 $X_0 = n + 0.5$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 若一名从业者该项身体指标检测值大于 X_0 , 则判断其患有这种职业病; 若检测值小于 X_0 , 则判断其未患有这种职业病. 从样本中随机选择一名从业者, 按照这种方式判断其是否患有职业病. 写出使得判断错误的概率最小的 X_0 的值及相应的概率 (只需写出结论).

18. (本小题满分 14 分)

已知直线 $l: y = kx + 1$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 相切于点 P .

(I) 求直线 l 的方程及点 P 的坐标;

(II) 设 Q 在抛物线 C 上, A 为 PQ 的中点. 过 A 作 y 轴的垂线, 分别交抛物线 C 和直线 l 于 M ,

N . 记 $\triangle PMN$ 的面积为 S_1 , $\triangle QAM$ 的面积为 S_2 , 证明: $S_1 = S_2$.



19. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} - ax$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线经过点 $(2, -1)$.

(I) 求实数 a 的值;

(II) 设 $b > 1$, 求 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{b}, b]$ 上的最大值和最小值.

20. (本小题满分 13 分)

数列 $A_n: a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 2)$ 的各项均为整数, 满足: $a_i \geq -1 (i=1, 2, \dots, n)$, 且

$$a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + a_3 \cdot 2^{n-3} + \dots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n = 0, \text{ 其中 } a_1 \neq 0.$$

(I) 若 $n=3$, 写出所有满足条件的数列 A_3 ;

(II) 求 a_1 的值;

(III) 证明: $a_1 + a_2 + \dots + a_n > 0$.



西城区高三模拟测试

数学(理科)参考答案及评分标准

2018.5

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

- | | | | |
|------|------|------|------|
| 1. C | 2. A | 3. D | 4. B |
| 5. D | 6. C | 7. A | 8. A |

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-------------------|
| 9. $\pi, \frac{6}{5}$ | 10. 6 | 11. $\frac{1}{3}$ |
| 12. $-n+2$ (答案不唯一) | 13. $[\frac{1}{2}, 3]$ | 14. D |

注：第 9 题第一空 3 分，第二空 2 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15. (本小题满分 13 分)

解：(I) 因为函数 $y = \tan x$ 的定义域是 $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$,

所以 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ 4 分

(II) $f(x) = (1 + \tan x) \cdot \sin 2x$

$= (1 + \frac{\sin x}{\cos x}) \cdot \sin 2x$ 5 分

$= \sin 2x + 2\sin^2 x$ 6 分

$= \sin 2x - \cos 2x + 1$ 7 分

$= \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + 1$ 8 分

由 $f(\alpha) = 2$, 得 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 9 分

因为 $0 < \alpha < \pi$, 所以 $-\frac{\pi}{4} < 2\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4}$, 10 分

所以 $2\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, 或 $2\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ 11 分

解得 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 或 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (舍去). 13 分



16. (本小题满分 14 分)

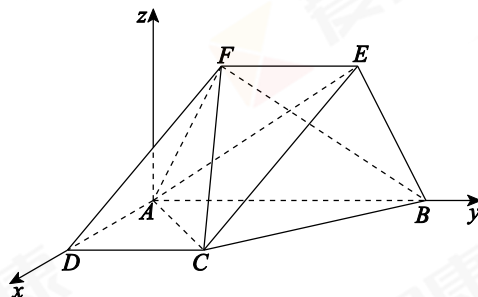
解: (I) 因为 $CD \parallel EF$, 且 $CD = EF$,

所以 四边形 $CDFE$ 为平行四边形,

所以 $DF \parallel CE$ 2 分

因为 $DF \not\subset$ 平面 BCE , 3 分

所以 $DF \parallel$ 平面 BCE 4 分



(II) 在平面 $ABEF$ 内, 过 A 作 $Az \perp AB$.

因为 平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$, 平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABEF = AB$,

又 $Az \subset$ 平面 $ABEF$, $Az \perp AB$,

所以 $Az \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $AD \perp AB$, $AD \perp Az$, $Az \perp AB$.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$ 5 分

由题意得, $A(0,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(2,2,0)$, $E(0,3,\sqrt{3})$, $F(0,1,\sqrt{3})$.

所以 $\overrightarrow{BC} = (2, -2, 0)$, $\overrightarrow{BF} = (0, -3, \sqrt{3})$.

设平面 BCF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ -3y + \sqrt{3}z = 0. \end{cases}$$

令 $y = 1$, 则 $x = 1$, $z = \sqrt{3}$, 所以 $\mathbf{n} = (1, 1, \sqrt{3})$ 7 分

平面 ABF 的一个法向量为 $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, 8 分

$$\text{则 } \cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

所以 二面角 $C-BF-A$ 的余弦值 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 10 分

(III) 线段 CE 上不存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF , 理由如下: 11 分

解法一: 设平面 ACE 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} 2x_1 + 2y_1 = 0, \\ 3y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0. \end{cases}$$

令 $y_1 = 1$, 则 $x_1 = -1$, $z_1 = -\sqrt{3}$, 所以 $\mathbf{m} = (-1, 1, -\sqrt{3})$ 13 分



因为 $m \cdot n \neq 0$,

所以 平面 ACE 与平面 BCF 不可能垂直,

从而线段 CE 上不存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF14 分

解法二: 线段 CE 上不存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF , 理由如下:11 分

假设线段 CE 上存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF ,

设 $\overrightarrow{CG} = \lambda \overrightarrow{CE}$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$.

设 $G(x_2, y_2, z_2)$, 则有 $(x_2 - 2, y_2 - 2, z_2) = (-2\lambda, \lambda, \sqrt{3}\lambda)$,

所以 $x_2 = 2 - 2\lambda$, $y_2 = 2 + \lambda$, $z_2 = \sqrt{3}\lambda$, 从而 $G(2 - 2\lambda, 2 + \lambda, \sqrt{3}\lambda)$,

所以 $\overrightarrow{AG} = (2 - 2\lambda, 2 + \lambda, \sqrt{3}\lambda)$13 分

因为 $AG \perp$ 平面 BCF , 所以 $AG \parallel n$.

所以有 $\frac{2 - 2\lambda}{1} = \frac{2 + \lambda}{1} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3}}$,

因为 上述方程组无解, 所以假设不成立.

所以 线段 CE 上不存在点 G , 使得 $AG \perp$ 平面 BCF14 分

17. (本小题满分 13 分)

解: (I) 根据分层抽样原则, 容量为 100 的样本中, 患病者的人数为 $100 \times \frac{3.4}{8.5} = 40$ 人. ... 2 分

$$a = 1 - 0.10 - 0.35 - 0.25 - 0.15 - 0.10 = 0.05,$$

$$b = 1 - 0.10 - 0.20 - 0.30 = 0.40. \quad \text{..... 4 分}$$

(II) 指标检测数据为 4 的样本中,

有患病者 $40 \times 0.20 = 8$ 人, 未患病者 $60 \times 0.15 = 9$ 人. 6 分

设事件 A 为“从中随机选择 2 人, 其中有患病者”.

$$\text{则 } P(\bar{A}) = \frac{C_9^2}{C_{17}^2} = \frac{9}{34}, \quad \text{..... 8 分}$$

$$\text{所以 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{25}{34}. \quad \text{..... 9 分}$$

(III) 使得判断错误的概率最小的 $X_0 = 4.5$11 分

当 $X_0 = 4.5$ 时, 判断错误的概率为 $\frac{21}{100}$13 分



18. (本小题满分 14 分)

解: (I) 由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$. ① 2 分

依题意, 有 $k \neq 0$, 且 $\Delta=(2k-4)^2-4k^2=0$.

解得 $k=1$ 3 分

所以直线 l 的方程为 $y=x+1$ 4 分

将 $k=1$ 代入①, 解得 $x=1$,

所以点 P 的坐标为 $(1,2)$ 5 分

(II) 设 $Q(m,n)$, 则 $n^2=4m$, 所以 $A(\frac{m+1}{2}, \frac{n+2}{2})$ 7 分

依题意, 将直线 $y=\frac{n+2}{2}$ 分别代入抛物线 C 与直线 l ,

得 $M(\frac{(n+2)^2}{16}, \frac{n+2}{2})$, $N(\frac{n}{2}, \frac{n+2}{2})$ 8 分

因为 $|MN|=\left|\frac{(n+2)^2}{16}-\frac{n}{2}\right|=\left|\frac{n^2-4n+4}{16}\right|=\left|\frac{4m-4n+4}{16}\right|=\left|\frac{m-n+1}{4}\right|$, 10 分

$$\begin{aligned} |AM| &= \left| \frac{m+1}{2} - \frac{(n+2)^2}{16} \right| = \left| \frac{(8m+8)-(n^2+4n+4)}{16} \right| \\ &= \left| \frac{(8m+8)-(4m+4n+4)}{16} \right| = \left| \frac{m-n+1}{4} \right|, \end{aligned}$$

.....12 分

所以 $|AM|=|MN|$13 分

又 A 为 PQ 中点, 所以 P, Q 两点到直线 AN 的距离相等,

所以 $S_1=S_2$14 分

19. (本小题满分 13 分)

解: (I) $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=\frac{1-\ln x-ax^2}{x^2}$, 2 分

所以 $f'(1)=1-a$.

依题意, 有 $\frac{f(1)-(-1)}{1-2}=1-a$,

即 $\frac{-a+1}{1-2}=1-a$, 4 分

解得 $a=1$ 5 分



(II) 由(I)得 $f'(x) = \frac{1-x^2-\ln x}{x^2}$.

当 $0 < x < 1$ 时, $1-x^2 > 0$, $-\ln x > 0$, 所以 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 单调递增;

当 $x > 1$ 时, $1-x^2 < 0$, $-\ln x < 0$, 所以 $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增, 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减. 8 分

因为 $0 < \frac{1}{b} < 1 < b$, 所以 $f(x)$ 最大值为 $f(1) = -1$ 9 分

设 $h(b) = f(b) - f(\frac{1}{b}) = (b + \frac{1}{b})\ln b - b + \frac{1}{b}$, 其中 $b > 1$ 10 分

则 $h'(b) = (1 - \frac{1}{b^2})\ln b > 0$,

故 $h(b)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 11 分

所以 $h(b) > h(1) = 0$, 即 $f(b) > f(\frac{1}{b})$, 12 分

故 $f(x)$ 最小值为 $f(\frac{1}{b}) = -b\ln b - \frac{1}{b}$ 13 分

20. (本小题满分 13 分)

解: (I) 满足条件的数列 A_3 为: $-1, -1, 6$; $-1, 0, 4$; $-1, 1, 2$; $-1, 2, 0$ 3 分

(II) $a_1 = -1$ 4 分

否则, 假设 $a_1 \neq -1$, 因为 $a_1 \neq 0$, 所以 $a_1 \geq 1$. 又 $a_2, a_3, \dots, a_n \geq -1$, 因此有

$$\begin{aligned} & a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + a_3 \cdot 2^{n-3} + \dots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n \\ & \geq 2^{n-1} + (-1) \cdot 2^{n-2} + (-1) \cdot 2^{n-3} + \dots + (-1) \cdot 2 + (-1) \\ & = 2^{n-1} - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \dots - 2 - 1 = 1, \end{aligned}$$

这与 $a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + a_3 \cdot 2^{n-3} + \dots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n = 0$ 矛盾!

所以 $a_1 = -1$ 8 分

(III) 先证明如下结论: $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, 必有 $a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + a_k \cdot 2^{n-k} \leq 0$.

否则, 令 $a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + a_k \cdot 2^{n-k} > 0$,

注意左式是 2^{n-k} 的整数倍, 因此 $a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + a_k \cdot 2^{n-k} \geq 2^{n-k}$.

所以有:



$$\begin{aligned} & a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + a_3 \cdot 2^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n \\ & \geq 2^{n-k} + (-1) \cdot 2^{n-k-1} + (-1) \cdot 2^{n-k-2} + \cdots + (-1) \cdot 2 + (-1) \\ & = 2^{n-k} - 2^{n-k-1} - 2^{n-k-2} - \cdots - 2 - 1 \\ & = 1, \end{aligned}$$

这与 $a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + a_3 \cdot 2^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n = 0$ 矛盾!

所以 $a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + a_k \cdot 2^{n-k} \leq 0$10 分

因此有:

$$\begin{aligned} & a_1 < 0, \\ & a_1 \cdot 2 + a_2 \leq 0, \\ & a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 2 + a_3 \leq 0, \\ & \dots \\ & a_1 \cdot 2^{k-1} + a_2 \cdot 2^{k-2} + \cdots + a_{k-1} \cdot 2 + a_k \leq 0, \\ & \dots \\ & a_1 \cdot 2^{n-2} + a_2 \cdot 2^{n-3} + \cdots + a_{n-2} \cdot 2 + a_{n-1} \leq 0. \end{aligned}$$

将上述 $n-1$ 个不等式相加得 $a_1 \cdot (2^{n-1} - 1) + a_2 \cdot (2^{n-2} - 1) + \cdots + a_{n-1} \cdot (2 - 1) < 0$, ①

又 $a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + a_3 \cdot 2^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \cdot 2 + a_n = 0$, ②

两式相减即得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > 0$13 分